

臺灣港務股份有限公司
108 年度獎學就業計畫暨獎學從業人員甄試
試題卷

應考科目：工程數學

考試時間：80 分鐘

※注意：

- (一) 試題共 40 題單選題。
- (二) 各題答案須於答案卷上作答，於本試題作答者，不予計分。
- (三) 試題卷及答案卷務必繳回，違者該科不予計分。
- (四) 禁止使用電子計算器。

說明：每題 4 分，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

B 1. 求解常微分方程式： $y'' + y' - 2y = 0$

- (A) $c_1e^x + c_2e^{2x}$
- (B) $c_1e^x + c_2e^{-2x}$
- (C) $c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$
- (D) $c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$

A 2. 求解常微分方程式： $y'' - 4y' + 4y = 0$

- (A) $c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$
- (B) ce^{2x}
- (C) $c_1e^x + c_2e^{2x}$
- (D) $c_1e^x + c_2x^2e^x$

C 3. 求解常微分方程式： $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\sin 2x$

(A) $c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \sin x - \frac{x}{4} e^{-x} \cos x$

(B) $c_1 e^{-2x} \cos 2x + c_2 e^{-2x} \sin 2x - \frac{x}{4} e^{-2x} \cos 2x$

(C) $c_1 e^{-x} \cos 2x + c_2 e^{-x} \sin 2x - \frac{x}{4} e^{-x} \cos 2x$

(D) $c_1 e^{-x} \cos 2x + c_2 e^{-x} \sin 2x - \frac{x}{4} e^{-2x} \cos 2x$

B 4. 試求函數 $f(x) = x$ 的傅立葉餘弦級數(Fourier cosine series)，其中 $0 \leq x \leq \pi$ 。

(A)

$$\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx$$

(B)

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx$$

(C)

$$\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nx$$

(D)

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nx$$

D 5. 試求下列函數的拉普拉斯反轉換(inverse Laplace transform)：

$$\frac{4}{s^2 + 4s + 20}$$

(A) $e^{-t} \sin 2t$ (B) $e^{-t} \sin 4t$ (C) $e^{-2t} \sin 2t$ (D) $e^{-2t} \sin 4t$

B 6. 試求 $f(x)$ 的傅立葉級數(Fourier series)，其中 $f(x) = x^2 (-\pi \leq x \leq \pi)$

(A)

$$f(x) = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

(B)

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

(C)

$$f(x) = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

(D)

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

A 7. 已知二向量 \vec{A} 、 \vec{B} 如下：

$$\vec{A} = 5\vec{a}_x + \vec{a}_y + 2\vec{a}_z,$$

$$\vec{B} = \vec{a}_x - 2\vec{a}_z,$$

試求 $\vec{A} \cdot \vec{B}$ 。

(A) 1

(B) 9

(C) $5\vec{a}_x - 4\vec{a}_z$

(D) $5\vec{a}_x + \vec{a}_y - 4\vec{a}_z$

C 8. 已知二向量 $\vec{r}_P = 10\vec{a}_x + 3\vec{a}_y - 4\vec{a}_z$ 及 $\vec{r}_Q = 9\vec{a}_x + 2\vec{a}_y - 3\vec{a}_z$ ，其分別為原點至 P 點以及原點至 Q 點的向量，試求 $\vec{r}_P - \vec{r}_Q$ 。

(A) $19\vec{a}_x + 5\vec{a}_y - 7\vec{a}_z$

(B) $-19\vec{a}_x - 5\vec{a}_y + 7\vec{a}_z$

(C) $\vec{a}_x + \vec{a}_y - \vec{a}_z$

(D) $-\vec{a}_x - \vec{a}_y + \vec{a}_z$

A 9. 若 $\vec{A} = 5x^2y\vec{a}_x + 3yz\vec{a}_y + xz^3\vec{a}_z$ ，試求 $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A})$ 。

(A) 0

(B) $10xy + 3z + 3xz^2$

(C) $10xy\vec{a}_x + 3z\vec{a}_y + 3xz^2\vec{a}_z$

(D) 1

- B 10. 試求 $\vec{\mathbf{E}} = 5x^2\vec{\mathbf{a}}_x + xy\vec{\mathbf{a}}_y + yz\vec{\mathbf{a}}_z$ 於點 $(1, 0, 1)$ 處之散度(divergence)。
- (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13

A 11. 矩陣 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ \lambda & \lambda^2 & 1 \end{bmatrix}$

若反矩陣 \mathbf{A}^{-1} 存在，請找出 λ 。

- (A) $\lambda \neq \frac{3}{2}, -1$ (B) $\lambda \neq -\frac{3}{2}, 1$
 (C) $\lambda \neq \frac{3}{2}, 1$ (D) $\lambda \neq -\frac{3}{2}, -1$

- C 12. 若 $\text{rank}(\mathbf{A}) = 2$ ，則 x 應為多少？

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5-x & 4 & -2 \\ 4 & 5-x & -2 \\ -2 & -2 & 3-2x \end{bmatrix}$$

- (A) 0 (B) 1 (C) $\frac{19}{2}$ (D) $\frac{11}{2}$

- A 13. 求解微分方程式： $2xydx + (1+x^2)dy = 0$ ， $y(2) = 5$

- (A) $y(x^2 + 1) = 25$ (B) $y(x^2 + 1) = 15$
 (C) $y(x^2 - 1) = 25$ (D) $y(x^2 - 1) = 15$

- A 14. $y'' + \lambda y = 0$ ($0 < x < 1$)

且 $y(0) = 0$ 及 $y'(0) = y(1)$

下列何者為此方程式的特徵值(eigenvalue)？

- (A) $\lambda = 0$ (B) $\lambda = -1$ (C) $\lambda = 1$ (D) $\lambda = 2$

- D 15. 下列何者不是正合(exact)微分方程式？

- (A) $(2x-1)dx + (3y+7)dy = 0$ (B) $(5x+4y)dx + (4x-8y^3)dy = 0$

(C) $(2xy^2 - 3)dx + (2x^2y + 4)dy = 0$

(D) $(x^2 - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy = 0$

D 16. 下列哪一組函數彼此線性相依？

(A) $y_1 = \cos 3x, y_2 = \sin 3x$

(B) $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}, y_3 = e^{3x}$

(C) $y_1 = x, y_2 = x^2, y_3 = x^3$

(D) $y_1 = x, y_2 = x^2, y_3 = 4x - 3x^2$

B 17. 下列何者為函數的拉普拉斯轉換 $\mathcal{L}\{\sin 2t\}$

(A) $\frac{s}{s^2 + 4}$

(B) $\frac{2}{s^2 + 4}$

(C) $\frac{1}{s^2 + 4}$

(D) $\frac{2}{s^2}$

D 18. 下列何者為 $F(s)$ 的拉普拉斯反轉換,

$$F(s) = \frac{s}{(s-2)(s-3)(s-6)}$$

(A) $e^{2t} - e^{3t} + e^{6t}$

(B) $\frac{1}{2}e^{2t} - e^{3t} + e^{6t}$

(C) $e^{2t} - e^{3t} + \frac{1}{2}e^{6t}$

(D) $\frac{1}{2}e^{2t} - e^{3t} + \frac{1}{2}e^{6t}$

C 19. 假設 A, B 和 C 為任意三個 $n \times n$ 矩陣，下列何者敘述不恆真？

(A) $(A+B)+C = A+(B+C)$

(B) $(A+B)C = AC+BC$

(C) 若 $AB = AC$ ，則 $B = C$

(D) $(AB)C = A(BC)$

B 20. 向量場 $\vec{F}(x, y, z) = (z - \frac{3}{2}y)\hat{i} + (\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}z)j + (\frac{1}{2}y - x)k$ ，旋度(curl) $\nabla \times \vec{F}$ 為何？

(A) $\hat{i} + j + k$

(B) $\hat{i} + 2j + 3k$

(C) $\hat{i} - j - k$

(D) $\hat{i} - 2j - 3k$

A 21. 向量場 $\vec{F}(x, y, z) = (z - \frac{3}{2}y)\hat{i} + (\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}z)j + (\frac{1}{2}y - x)k$ ，

$\nabla \cdot \vec{F}$ 為何？

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

A 22. 下列何者為微分方程式的解 $(x+y)^2 dx + (2xy + x^2 - 1)dy = 0, y(1) = 1$

(A) $\frac{1}{3}x^3 + x^2y + xy^2 - y = \frac{4}{3}$

(B) $\frac{1}{3}x^3 + x^2y - y = \frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{3}x^3 + xy^2 - y = \frac{1}{3}$

(D) $x^2y + xy^2 - y = 1$

A 23. 下列何者為微分方程式的一般解 $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y''' - y'' = 0$

(A) $y = c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4xe^x + c_5x^2e^x$

(B) $y = c_1 + c_2x + c_3xe^x + c_4x^2e^x + c_5x^3e^x$

(C) $y = c_1x + c_2x^2 + c_3e^x + c_4xe^x + c_5x^2e^x$

(D) $y = c_1x + c_2x^2 + c_3xe^x + c_4x^2e^x + c_5x^3e^x$

A 24. 下列何者為 $f(t)$ 的拉普拉斯轉換, $f(t) = \begin{cases} \sin 2t, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$

(A) $\frac{2+2e^{-\pi s}}{s^2+4}$

(B) $\frac{s+se^{-\pi s}}{s^2+4}$

(C) $\frac{2-2e^{-\pi s}}{s^2+4}$

(D) $\frac{2e^{-\pi s}}{s^2+4}$

B 25. 請問矩陣 $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ 的秩(Rank)為何?

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4